GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 3 (23) — No. 2 — 1968.

DIE FUSSPUNKTFLÄCHEN DER LINEAREN KONGRUENZEN

Eduard Kranjčević, Zagreb

Einführung

Eine besondere Stelle in der Flächenklassifikation nehmen diejenigen Flächen ein, die den absoluten Kegelschnitt enthalten. Die Erzeugungsarten solcher Flächen können sehr verschieden sein. Sie können z. B. mittels der bekannten Möbiusschen quadratischen Inversion erhalten werden (der allgemeinen oder gewöhnlichen), oder auch als Fusspunktflächen. In der letzten Erzeugungsart werden aus einem beliebig gewälten Pol die Normalen auf die Tangentialebenen einer Fläche gefällt. Die ∞^2 Fusspunkte dieser Normalen auf den Tangentialebenen bilden, wie bekannt, eine Fusspunktfläche.

Eine Fusspunktfläche kann auch auf folgende Weise erzeugt werden: Man betrachte eine Kongruenz n-ter Ordnung und m-ter Klasse und einen Punkt P als Pol. Jeden Strahl dieser Kongruenz schneidet eine auf diesen Strahl senkrechte und den Pol enthaltende Ebene im Fusspunkt dieses Strahles. Alle derartigen ∞^2 im Raum stetig liegenden Fusspunkte bilden die Fusspunktfläche dieser Kongruenz. In dieser Arbeit wird die Ordnung einer derartigen Fusspunktfläche bestimmt, und es werden die Fusspunktflächen der linearen Kongruenzen etwas näher betrachtet. In diesen Betrachtungen werden wir uns einer speziellen kubischen Transformation bedienen, über die später ausführlicher gesprochen wird.

1.

Die Kongruenz n-ter Ordnung und m-ter Klasse bezeichne man mit $K(n\,m)$. Um die Ordnung der Fusspunktfläche dieser Kongruenz für einen gegebenen Pol zu finden, müssen wir das Folgende tun: Eine Gerade l, die ganz beliebig angenommen wird, wird diese Fusspunktfläche in Punkten schneiden, deren Anzahl der Ordnung dieser Fusspunktfläche gleich ist. Man nehme die Gerade l als Leitgerade eines linearen singulären Komplexes an. Dieser Komplex und die Kongruenz $K(n\,m)$ haben eine Regelfläche $(n+m)$-ten Grades gemein, die die Gerade l als eine n-fache Linie enthält. Da die Erzeugenden dieser Regelfläche

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

Strahlen der Kongruenz $K(nm)$ sind, muss die Fusspunktkurve dieser Regelfläche und des Pols P auf der gesuchten Fusspunktfläche liegen. Es sei diese Fusspunktkurve mit k_n bezeichnet. Wie bekannt ist die Fusspunktkurve einer Regelfläche r-ten Grades $2r$-ter Ordnung [1]. Um die Ordnung der gesuchten Fusspunktfläche zu finden, muss also die Zahl der Schnittpunkte der n-fachen Leitgeraden der Regelfläche $(n+m)$-ten Grades mit der erwähnten Fusspunktkurve k_n gefunden werden. Die Fusspunktkurve einer Regelfläche $(n+m)$-ten Grades ist $2(n+m)$-ter Ordnung. Es schneidet also jede Ebene der Geraden l die Fusspunktkurve k_n in $2(n+m)$ Punkten. In jeder Ebene der Geraden l befinden sich aber m Strahlen der Kongruenz $K(nm)$, und deswegen werden m Schnittpunkte von den erwähnten $2(n+m)$ ausserhalb der Geraden l liegen. Die Gerade l schneidet also die Fusspunktkurve k_n in $2n+m$ Punkten, und hieraus folgt der folgende

S a t z 1. *Die Fusspunktfläche einer Kongruenz n-ter Ordnung und m-ter Klasse ist $(2n+m)$-ter Ordnung.*

Jeder Punkt des Raumes enthält n Strahlen der Kongruenz $K(nm)$. Wie bekannt, ist die senkrechte Lage im Endlichen durch die Polaritet bezüglich des absoluten Kegelschnittes bestimmt. Es folgt also, das der absolute Kegelschnitt eine imaginäre n-fache Kurve der Fusspunktfläche der Kongruenz $K(nm)$ ist. Ausser dem absoluten Kegelschnitt befinden sich in der Fernebene auch m Strahlen der Kongruenz $K(nm)$, die auch auf der betrachteten Fusspunktfläche liegen. Die Schnittkurve der Fernebene mit der betrachteten Fusspunktfläche besteht also aus dem n-fachen absoluten Kegelschnitt und m Strahlen der Kongruenz $K(nm)$. Da der Pol P auch n Strahlen der Kongruenz enthält, muss der Punkt P ein n-facher Punkt der betrachteten Fusspunktfläche sein.

2.

Mittels der Ordnung und der Klasse der gegebenen Kongruenz konnten wir, wie gezeigt, die Ordnung ihrer Fusspunktfläche und die beschriebenen Eigenschaften dieser Fläche finden, aber keine andere in diesem allgemeinem Fall der gegebenen Kongruenz. Wir werden uns jetzt mit den Fusspunktflächen der linearen Kongruenzen beschäftigen, die dritter Ordnung sind, und die schon bisher auf andere Weise untersucht und bekannt sind. Auf Grund unserer Erzeugungsart werden wir die 27 Geraden dieser Flächen finden und eventuelle Doppelpunkte und Systeme ihrer Kegelschnitte betrachten.

Es besteht eine kubische Raumtransformation, die uns bei der Untersuchung unserer mittels der linearen Kongruenzen entstandenen Fusspunktflächen 3. Ordnung helfen wird. Diese kubische Raumtransformation erhält man mittels einer Fläche Φ^2 2. Grades und einer linearen Kongruenz auf folgende Weise: Man nimmt ausser Fläche und dieser Kongruenz eine beliebige Ebene an. Jeder Strahl der linearen Kongruenz schneidet diese Ebene in einem Punkt, zu dem bezüglich der gegebenen Fläche 2. Grades auf demselben Strahl ein konjugiert zugeordneter Punkt gehört. Der Schnittpunktmenge aller Strahlen der Kongruenz mit der gegebenen Ebene ist so eine neue stetige Punktmenge zugeordnet, die eine Fläche 3. Ordnung bildet [2]. Um uns bei der Betrachtung unserer Fusspunktflächen linearer Kongruenzen dieser kubischen Transformation bedienen zu können, werden wir anstatt der allgemeinen Fläche Φ^2 2. Grades einen isotropen Kegel nehmen, der den Scheitel im Pol P hat. Es sei anstatt der Fläche Φ^2 zuerst ein reeller Kegel K 2. Grades genommen. Ein reeller Punkt T enthält einen Strahl der linearen Kongruenz, der die Polarebene des Punktes T bezüglich dieses Kegels in einem Punkt T_K schneidet, der das Bild des Punktes T in dieser Transformation ist. Wie schon erwähnt, ist die senkrechte Lage im Endlichen durch die polare Zuordnung bezüglich des absoluten Kegelschnittes in der Fernebene definiert. Auf Grund dessen folgt also, dass die den Pol enthaltende und auf einen Strahl senkrecht stehende Ebene die Polarebene des Fernpunktes dieses Strahles bezüglich des isotropen Kegels mit dem Scheitel im Pol P ist. Es gilt also

Satz 2. *Die Fusspunktfläche einer linearen Kongruenz ist eine Fläche 3. Ordnung, die mittels kubischer Inversion durch Transformation der Fernebene enstanden ist, wobei die Grundfläche der kubischen Inversion der isotrope Kegel des Transformationspols ist, und die Transformationsstrahlen als Strahlen zu einer linearen Kongruenz gehören.*

Bei der erwähnten kubischen Inversion bestehen in der Ebene, die in die Fläche 3. Ordnung transformiert wird, besondere Elemente, die durch die kubische Transformation in die Geraden der transformierten Fläche abgebildet werden. Dies sind die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser Ebene mit den Leitgeraden p_1, p_2 der gegebenen linearen Kongruenz, und die vier Schnittpunkte dieser Ebene mit der bekannten Raumkurve 4. Ordnung π^4, die mit A, B, C und D bezeichnet seien [2]. Die Bilder der Punkte P_1, P_2, A, B, C und D sind Gerade der betrachteten Fusspunktfläche. Durch je fünf dieser sechs Punkte ist ein Kegelschnitt bestimmt, deren Bilder weitere sechs Gerade auf der erwähnten Fusspunktfläche ergeben. Die fünfzehn Verbindungsgeraden je zweier dieser sechs Punkte transformieren sich in die fünfzehn übriggebliebenen Geraden unserer Fusspunktfläche 3. Ordnung, da es, wie bekannt, auf einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung 27 Gerade gibt. Offenbar brauchen in der unserem Fall angepassten kubischen Transformation alle erwähnten besonderen Elemente der gegebenen Ebene nicht reell zu sein. Die Raumkurve π^4 4. Ordnung ist ganz imaginär, und dadurch selbstverständlich auch die Punkte A, B, C und D, die in zwei Paaren konjugiert imaginär sind, also auf zwei reellen Geraden liegen. Es folgt weiterhin, dass auch die durch die kubische Transformation gewonnenen Bilder auf der Fusspunktfläche, die diesen imaginären Elementen zugeordnet sind, auch imaginär sein werden. Von den 27 reellen Geraden sind in den betrachteten Fällen nur einige reell.

3.

Man betrachte zunächst die Fusspunktfläche der linearen hyperbolischen Kongruenz K_h. Die Leitgeraden p_1, p_2 dieser Kongruenz werden reelle Geraden der erzeugten Fusspunktfläche sein. Die Fernpunkte dieser Geraden seien mit P_1 und P_2 bezeichnet. Durch die vier imaginären Punkte A, B, C, D sind nur zwei reelle Verbindungsgerade bestimmt, und reell sind die zwei Kegelschnitte ($P_1 ABCD$) und ($P_2 ABCD$), wie auch die Verbindungsgerade $P_1 P_2$. Man bekommt also auf diese Weise eine Fläche 3. Ordnung mit 7 reellen Geraden. Die gegebenen reellen Leitgeraden p_1, p_2 sind Bilder der Kegelschnitte ($P_1 ABCD$) und ($P_2 ABCD$). Der Punkt P_1 wird in diejenige Gerade a transformiert, welche Schnittgerade der dem Punkt P_1 bezüglich des isotropen Kegels des Pols P zugeordneten Polarebene und der Ebene des Punktes P_1 und Geraden p_2 ist. Diese Gerade a ist die Fusspunktreihe derjenigen parallelen Kongruenzstrahlen, die sich in der Ebene der Geraden p_2 befinden, welche mit der Geraden p_1 parallel liegt. Dem Punkt P_2 ist auf dieselbe Weise eine Gerade b zugeordnet, die in der Ebene des Punktes P_2 und der Geraden p_1 liegt. Die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ bleibt invariant in dieser kubischen Transformation, liegt also auf der Fusspunktfläche und ist der Fernstrahl der gegebenen hyperbolischen Kongruenz. Die reellen Verbindungsgeraden der Punkte A, B und C, D ergeben auf der erzeugten Fusspunktfläche die Geraden c und d, die sich in einem Punkt schneiden, und beide schneiden auch die Gerade $P_1 P_2$. Diese zwei Geraden bilden auf der erzeugten Fusspunktfläche 3. Ordnung eines ihrer bekannten Dreiseite [2]. Ein weiteres Dreiseit dieser Fläche bilden die Geraden a, p_2 und $P_1 P_2$, und ein drittes die Geraden b, p_1 und $P_1 P_2$. Die Ebenen der Geraden $P_1 P_2$ schneiden unsere Fusspunktfläche 3. Ordnung in Ellipsen, die in drei dieser Ebenen in Dreiseite zerfallen (zwei Gerade und die Gerade $P_1 P_2$). Eine derartige Fläche gehört, der Schläflischen Klassifikation nach, zur dritten Art. Alle die Geraden a, b, c, d, p_1 und p_2 enthaltenden Ebenen schneiden die erzeugte Fusspunktfläche nur in Kreisen.

Da der Pol P nur einen Strahl der hyperbolischen linearen Kongruenz enthält, kann der Pol P nur ein regulärer Punkt der erzeugten Fläche sein. Die Fernkurve dieser Fusspunktfläche zerfällt in die Gerade $P_1 P_2$ und den absoluten Kegelschnitt, da dieser auf allen Fusspunktflächen liegt. Es gilt also folgender

S a t z 3. *Die Fusspunktfläche einer linearen hyperbolischen Kongruenz ist eine Fläche 3. Ordnung die den absoluten Kegelschnitt und sieben reelle Gerade enthält.*

Im Falle einer elliptischen linearen Kongruenz ist die Fusspunktfläche selbstverständlich auch 3. Ordnung und enthält den absoluten Kegelschnitt. Die Leitgeraden p_1, p_2 der elliptischen linearen Kongruenz K_e sind konjugiert imaginäre Gerade zweiter Art, deren konjugiert imaginäre Fernpunkte P_1, P_2 auf dem reellen Strahl dieser Kongruenz K_e in der Fernebene liegen. Deswegen hat die Fusspunktfläche der elliptischen linearen Kongruenz K_e nur drei reelle Gerade. Diese drei Geraden sind die Inversionsbilder der reellen Verbindungsgeraden P_1P_2, AB und CD der sechs imaginären besonderen Punkte in der Fernebene. Diese drei reellen Geraden c, d und P_1P_2 bilden das einzige reelle Dreiseit dieser Fusspunktfläche. Durch die Ebenen der Geraden P_1P_2 wird diese Fläche 3. Ordnung in Ellipsen geschnitten, während die Ebenen der Geraden c und d diese Fläche in Kreisen schneiden. Der Pol P ist auch hier ein regulärer Punkt der erzeugten Fläche, und es gilt also hier der folgende

S a t z 4. *Die Fusspunktfläche einer linearen elliptischen Kongruenz ist eine allgemeine Fläche 3. Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt und drei reelle Gerade enthält.*

Der Schläflischen Klassifikation nach gehört diese Fläche zur 4. Art.

Die parabolische lineare Kongruenz K_p hat nur eine, aber zweideutige Leitgerade p (die Leitgeraden p_1, p_2 fallen hier in die Leitgerade p zusammen). Auf Grund dessen und der beschriebenen kubischen Inversion folgt, dass die Fusspunktfläche einer derartigen Kongruenz einen Doppelpunkt haben muss. Die Fernpunkte P_1, P_2 fallen hier in den Fernpunkt der Leitgeraden p zusammen, und das Bild dieses Punktes ist eine zweideutige Gerade a einer derartigen Fusspunktfläche. Diese Gerade a ist die Polare des Fernpunktes der Leitgeraden p in derjenigen Ebene, die den Fernstrahl der Kongruenz K_p und die Leitgerade p enthält, aber bezüglich des isotropen Kegels des Pols P. Diese Gerade a ist die Fusspunktreihe der mit der Leitgeraden p parallelen Strahlen der Kongruenz K_p. Der Schnittpunkt T der zweideutigen Geraden a und p ist ein Doppelpunkt der erzeugten Fusspunktfläche der parabolischen linearen Kongruenz K_p. Die anderen vier zweideutigen Geraden des Doppelpunktes T sind imaginär. Der Fernstrahl der Kongruenz K_p ist eine gewöhnliche Gerade der gennanten Fusspunktfläche, und die reellen Verbindungsgeraden AB, CD ergeben weitere zwei reelle Gerade dieser Fläche. Auch hier ist der Pol P ein regulärer Punkt dieser Fläche, deren Fernkurve auch hier in den absoluten Kegelschnitt und in den Fernstrahl der Kongruenz K_p zerfällt.

Die den Fernstrahl enthaltenden Ebenen schneiden diese Fusspunktfläche auch hier in Ellipsen, während die Ebenen der anderen zwei Geraden, so wie in den zwei anderen Fällen, diese Fläche in Kreisen schneiden. Es gilt also auch folgender

Satz 5. *Die Fusspunktfläche einer linearen parabolischen Kongruenz ist eine allgemeine Fläche 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt, die zwei zweideutige und drei eindeutige Gerade enthält.*

4.

Wenn wir den Pol P innerhalb der drei linearen Kongruenzen in einer besonderen Lage wählen wollten, könnte man als Fusspunktflächen neue Arten der Flächen 3. Ordnung erzeugen, die ausserhalb der beschriebenen Eigenschaften noch weitere bekannte interessante Singularitäten und Eigenschaften hätten, und dadurch könnte man hier auch andere bekannte Arten der Flächen 3. Ordnung finden. Das soll aber in dieser Arbeit nicht behandelt werden.

LITERATUR:

[1] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Band III, Leipzig-Wien, 1931,

[2] *D. Palman*, O jednoj prostornoj kubnoj inverziji i nekim njenim proizvodima, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **296** (1953), 199—214.

(Eingegangen am 2. XII 1967.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

NOŽIŠNE PLOHE LINEARNIH KONGRUENCIJA

Eduard Kranjčević, Zagreb

Sadržaj

U radu se najprije istražuje red ploha koje prolaze apsolutnom konikom, a nastale su kao nožišne plohe kongruencija n-tog reda i m-tog razreda. Red takove plohe je $2n + m$. Zatim se istražuju nožišne plohe linearnih kongruencija koje su dakako 3. reda. U slučaju hiperbolične kongruencije takva ploha ima sedam realnih pravaca, u slučaju eliptične kongruencije ima tri realna pravca, dok u slučaju parabolične kongruencije ima jednu dvostruku tačku, dva realna dvoznačna pravca i tri obična. Pri tom istraživanju primijenjena je prostorna kubna inverzija D. Palmana [2].